A - Développer, factoriser et réduire des expressions littérales

Définition :

- **Développer** un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une **somme algébrique**.
- **Factoriser** une somme algébrique c'est l'écrire sous la forme d'un **produit**.

k, a, b, c et d désignant des nombres relatifs.

$$k(a+b) = ka + kb \qquad \text{et} \qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple :

Développer et réduire :

$A = 7(x+2) = 7x + 14$

$B = -3(6-x) = -18 + 3x$

$C = (3x+1)(-5x+3) = -15x^2 + 9x - 5x + 3 = -15x^2 + 4x + 3$

Factoriser :

$D = 2x + 3x^2 = 2 \times x + 3x \times x = x \times (2+3x)$

$E = 6x - 12 = 6 \times x - 6 \times 2 = 6 \times (x-2)$

$F = 5x - x = 5 \times x - 1 \times x = x \times (5-1) = 4x$

B - Identités remarquables

Propriété

Pour tout nombres a et b :

$$(a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = \boxed{a^2 - b^2}$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \boxed{a^2 - 2ab + b^2}$$

Application :

Utiliser l'égalité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour factoriser une expression algébrique

Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$

$B = 49y^2 - 64 = (7y)^2 - 8^2 = (7y-8)(7y+8)$

C - Équations

1 - Équation du premier degré à une inconnue

Propriété :

a, b, c, d désignent des nombres relatifs (avec $a \neq c$).
Une équation du premier degré à une inconnue $ax + b = cx + d$ admet une solution et une seule.

Propriétés

On ne change pas les solutions d'une équation si :

- On développe, on réduit, chacun des deux membres de l'équation ;
- On additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres d'une équation ;
- On multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Méthode :

Résoudre l'équation $6x + 5 = (3 - x) \times 4$

1. On developpe et on réduit chaque membre :
   $6x + 5 = 12 - 4x$
2. On regroupe les termes inconnus dans un membre et les termes connus dans l'autre en additionnant leurs opposés :
   $6x + \cancel{5} - \cancel{5} + 4x = 12 - \cancel{4x} - 5 + \cancel{4x}$
   $6x + 4x = 12 - 5$
   $10x = 7$
3. On divise chaque membre par le facteur de x pour obtenir la solution :
   $\dfrac{\cancel{10}x}{\cancel{10}} = \dfrac{7}{10}$
   $x = \dfrac{7}{10}$

2 - Equation « produit nul »

Propriété :

- Si au moins l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.
- Si un produit est nul, alors au moins l'un de ses facteurs est nul.

Propriété :

a, b, c, d désignent des nombres relatifs.
Les solutions de l'équation « produit nul » $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les nombres x tels que :

$$ax+b=0 \text{ ou } cx+d=0$$

Application :

Résoudre l'équation $(2x-6)(3x+4)=0$
Il s'agit d'une équation « produit nul », dont les solutions sont les nombres x tels que :

$2x-6=0$	ou	$3x+4=0$
$2x=6$	ou	$3x=-4$
$x=3$	ou	$x=\dfrac{-4}{3}$

Les solutions de l'équation $(2x-6)(3x+4)=0$ sont donc 3 et $\dfrac{-4}{3}$

3 - Équation du type $x^2=a$

Propriété

a désigne un nombre positif ou nul.
Les solutions de l'équation $x^2=a$ sont les nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Preuve :

Résoudre l'équation $x^2=a$ revient à résoudre l'équation $x^2-a=0$, c'est à dire $x^2-(\sqrt{a})^2=0$
Avec l'identitée remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, on obtient :

$$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$$

C'est une équation « produit nul », dont les solutions sont les nombres x tels que :

$x-\sqrt{a}=0$	ou	$x+\sqrt{a}=0$
$x=\sqrt{a}$	ou	$x=-\sqrt{a}$