A Puissances de 10

1 Écritures naturelles

Propriété (admise) :

Soit n un nombre entier tel que $n \geqslant 2$.

- $10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n\ facteurs} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n\ zéros}$
- $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{\underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n\ facteurs}} = \dfrac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{n\ zéros}}$

Exemples :

- $10^6 = 1\,000\,000$
- $10^{-5} = 0{,}000\,01$
- $10^{-2} = 0{,}01$
- $10^4 = 10\,000$

Convention :

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$

2 Notation scientifique

Définition :

La notation scientifique d'un nombre décimal différent de 0 est la seule écriture de la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre décimal écrit avec un seul chiffre, autre que 0, avant la virgule ;
- n est un nombre entier relatif.

Exemples :

- $3{,}572 \times 10^4 \longrightarrow$ Oui, c'est une écriture scientifique
- $0{,}27 \times 10^{-2} \longrightarrow$ Non, ce n'est pas une écriture scientifique (Un chiffre nul avant la virgule)
- $215 \times 10^3 \longrightarrow$ Non, ce n'est pas une écriture scientifique (3 chiffres avant la virgule)

Méthode :

Pour mettre un nombre dans sa notation scientifique, par exemple $267{,}46$ on procède de la manière suivante :

❶ $267{,}46$ On part du nombre à transformer
❷ $2{,}674\,6$ On le met « sous la bonne forme »
❸ $2{,}674\,6 \times 10^2$ On réfléchit à la puissance de 10 qui permet de revenir au nombre initial.

Alors, $267{,}46 = 2{,}674\,6 \times 10^2$

Exemple :

- Notation scientifique de $456\,200$

  $456\,200 = 4{,}562 \times 10^5$

- Notation scientifique de $0{,}007\,42$

  $0{,}007\,42 = 7{,}42 \times 10^{-3}$

3 Préfixes

Définition :

On utilise des préfixes pour désigner certaines puissances de 10 :

préfixe	tera	giga	mega	kilo	-	milli	micro	nano	pico
symbole	T	G	M	k	-	m	μ	n	p
puissance	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{0}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Exemple :

- 1 GW $=$ 10^{9} W $= 1\,000\,000\,000$ W
- $5{,}6\,\mu$m $=$ $5{,}6\times10^{-6}$ m $= 0{,}000\,005\,6$ m

B Puissance de base quelconque

1 Exposant entier positif

Définition :

Soit a un nombre relatif et n un nombre entier tel que $n \geqslant 2$.

$$a^n = \underbrace{a\times\cdots\times a}_{n\ facteurs}$$

- On note a^n le produit de n facteur égaux à a
- On dit alors que a^n est une puissance de a d'exposant n.

Convention :

- Pour $a\neq 0$, $a^0 = 1$
- $a^1 = a$

2 Exposant entier négatif

Définition :

Soit a un nombre relatif tel que $a \neq 0$ et n un nombre entier.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad$ a^{-n} désigne l'inverse de a^n

Remarque :

$a^{-1} = \dfrac{1}{a^1} = \dfrac{1}{a}$, donc a^{-1} est une autre écriture de l'inverse de a.

Exemple :

- $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$
- $(-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = -\dfrac{1}{125}$
- $7^{-1} = \dfrac{1}{7}$

3 Réduire l'écriture de produits et de quotients

Exemple :

- $10^3 \times 10^2 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$
- $7^5 \times 7^{-3} = \dfrac{7^5}{7^3} = \dfrac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 7 \times 7 = 7^2$
- $\dfrac{5^2}{5^4} = \dfrac{5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{5^2} = 5^{-2}$

Formules :

Soient a et b deux nombres quelconques et m et n deux nombres entiers relatifs alors :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^m \times b^m = (a \times b)^m$