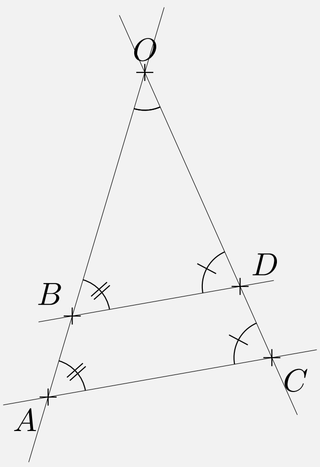
A - Proportionnalité dans le triangle

Propriété :

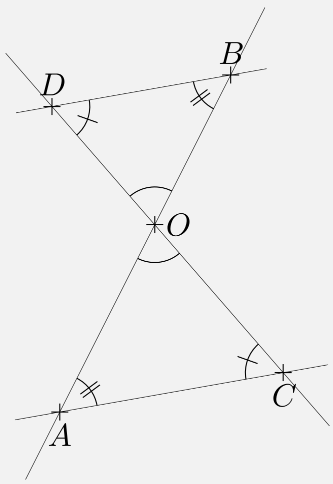
Deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles définissent deux triangles semblables.

①



- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.
- (AC)//(BD)

②



- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.
- (AC)//(BD)

Preuve (configuration ②) :

On sait que : $(AC)//(BD)$.
Propriété : Deux droites parallèles coupées par une sécante définissent des angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants égaux.
Donc : $\widehat{OBD} = \widehat{OAC}$ et $\widehat{ODB} = \widehat{OCA}$.

On sait que : Les angles $\widehat{DOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont opposés par le sommet
Donc : $\widehat{DOB} = \widehat{AOC}$.

On sait que : Les triangles ODB et AOC, ont leurs angles correspondants égaux.
Donc : Les triangles ODB et AOC sont semblables.

Conséquence :

Soient deux droites (AB) et (CD) sécantes en O telles que $(AC)//(BD)$.
Alors les triangles AOC et BOD sont semblables et on a le tableau de proportionnalité suivant :

$\triangle AOC$	OA	OC	AC	$\times k$
$\triangle BOD$	OB	OD	BD	

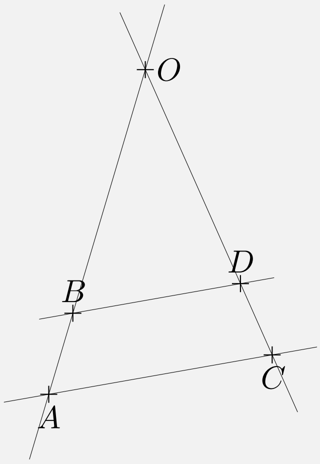
$$\text{Avec } k = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$$

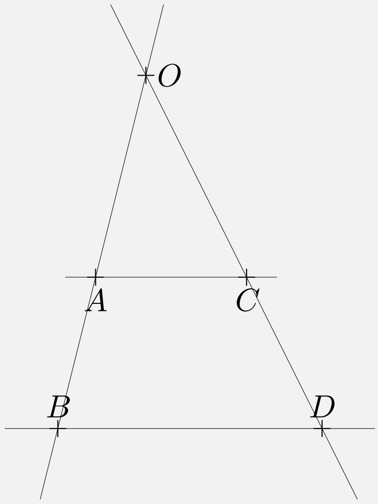
- Si $k > 1$, le triangle BOD est un agrandissement du triangle AOC.
- Si $k < 1$, le triangle BOD est une réduction du triangle AOC.

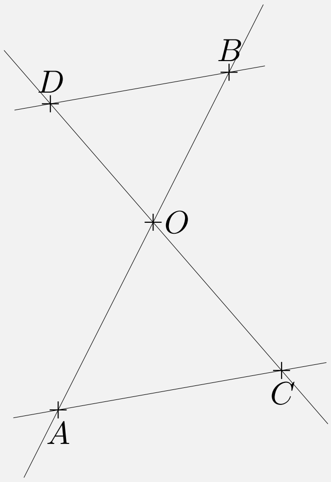
B - Calculer une longueur

Théorème de Thales :

Si deux droites sécantes (AB) et (CD) sont coupées par deux droites parallèles (AC) et (BD) :





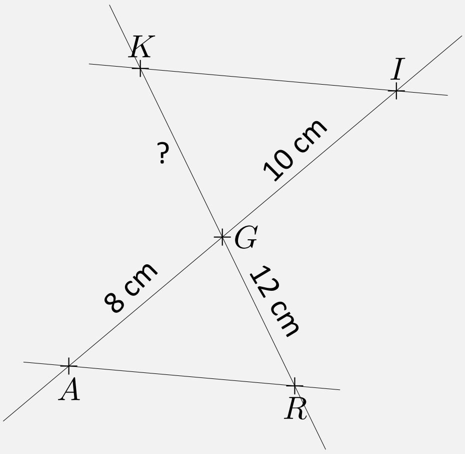


Alors :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} \quad \text{ou} \quad \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$$

Application 1 :

Les droites (AR) et (KI) sont parallèles.



Calculer la longueur KG.

On sait que :

- Les droites (AR) et (KI) sont parallèles.
- Les droites (AI) et (KR) sont sécantes en G.

D'aprés le théorème de Thalès : $\frac{GA}{GI} = \frac{GR}{GK} \left(= \frac{AB}{KI} \right)$

Avec les données : $\frac{8}{10} = \frac{12}{GK}$

Avec l'égalité des produits en croix :

$$\boxed{GK = \frac{12 \times 10}{8} = 15\,\text{cm}}$$

Application 2 :

n° 11 et 12 p 422

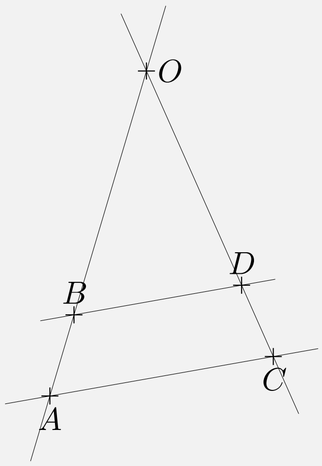
C - Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

Contraposée du théorème de Thales :

Si deux droites (BM) et (CN) sécantes en A avec les points A, B, M et A, C, N alignés dans le même ordre sont telles que $\dfrac{AB}{AM} \neq \dfrac{AC}{AN}$, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles

Application 1 :

$OB = 3$ cm, $OA = 4$ cm, $OD = 2$ cm, $DC = 1$ cm.



Les droites (AC) et (BD) sont elles parallèles ?

On sait que :

- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.
- Les points O, B, A et O,D,C sont alignés dans le même ordre.

On a **d'une part** : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{4}{3}$

et **d'autre part** : $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

On constate que : $\dfrac{OA}{OB} \neq \dfrac{OC}{OD}$

D'après la contraposée du théorème de Thalès,
les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

Application 2 :

n° 13 p 422

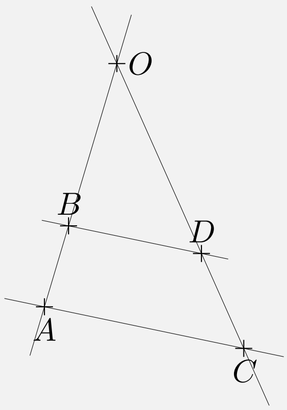
D - Montrer que deux droites sont parallèles

Réciproque du théorème de Thales :

Si deux droites (BM) et (CN) sécantes en A avec les points A, B, M et A, C, N alignés dans le même ordre sont telles que $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles

Application 1 :

$OB = 3$ cm, $OA = 4$ cm, $OD = 6$ cm, $DC = 2$ cm.



Les droites (AC) et (BD) sont elles parallèles ?

On sait que :

- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.
- Les points O, B, A et O,D,C sont alignés dans le même ordre.

On a **d'une part** : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{4}{3}$

et **d'autre part** : $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{6+2}{6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

On constate que : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OD}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès,
les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Application 2 :

n° 21 p 423